РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2002, том 47, № 9, с. 1029–1046

ОБЗОР

УДК 530

КОЛИЧЕСТВЕННОЕ ИЗМЕРЕНИЕ И ФИЗИЧЕСКОЕ СОДЕРЖАНИЕ КВАНТОВОЙ ИНФОРМАЦИИ

© 2002 г. Б. А. Гришанин, В. Н. Задков

Поступила в редакцию 15.01.2002 г.

Рассмотрена роль основных количественных мер квантовой информации для информационного анализа квантовых систем. Показано, что основные способы количественного измерения квантовой информации зависят от совместимости или несовместимости соответствующих квантовых событий и в случае полностью квантовых каналов можно выделить две качественно различные информационные меры: когерентную и совместимую информацию. Предложена общая информационная схема эксперимента в квантовой физике, с помощью которой проблема информационной оптимизации экспериментальной установки сведена к единой математической форме.

ВВЕДЕНИЕ

За последнее десятилетие в квантовой физике произошли существенные изменения, которые, ни в коей мере не затрагивая ее основ, радикально повлияли на оценку роли квантовой физики и ее качественного содержания. Если ранее при изучении особых неклассических свойств квантовых систем роль экспериментатора состояла только в создании необходимых условий на макроскопическом уровне (выбор объекта, воздействие с использованием макроскопических полей, обеспечение необходимой температуры и т.п.), то теперь стало возможным направленное изменение квантовых состояний самих элементарных квантовых систем. Это инициировало развитие ряда новых прикладных дисциплин: квантовой криптографии, квантовой связи и физики квантовых вычислений [1–4], использующих неклассические свойства состояний квантовых систем. Детальное обсуждение проявлений квантовой специфики физических систем, лежащей в основе перечисленных приложений, можно найти в современных обзорах [5–10] и монографиях [11–14]. Несмотря на все многообразие физических механизмов создания, обработки и передачи квантовой информации и ее применений, с фундаментальной точки зрения все они основаны на единственном качественно существенном отличии квантовых событий от классических. Это – *некоммутативность* квантовых переменных рассматриваемых систем, которая эквивалентна *неортогональности* их квантовых состояний, в связи с чем рассмотрение произвольного набора квантовых событий в рамках классической логики невозможно. Это является проявлением так называемой "несовместимости" неортогональных состояний.

Действительно, если, например, два квантовых состояния $|\alpha\rangle$, $|\beta\rangle$ ортогональны, то, используя их как алгебраический базис для алгебры с операцией сложения в виде линейного объединения подпространств (sp) и операцией умножения в виде пересечения, сразу же обнаружим, что построенная на $|\alpha\rangle$, $|\beta\rangle$ алгебра квантовых событий содержит лишь четыре подпространства $\{\varnothing, |\alpha\rangle, |\beta\rangle, H\}$, включая пустое $\varnothing$ и двумерное гильбертово пространство $H = \mathrm{sp}(|\alpha\rangle, |\beta\rangle)$. Она эквивалентна алгебре из четырех элементов $\{\varnothing, \alpha, \beta, \mathcal{M}\}$, $\mathcal{M} = \alpha \cup \beta$, построенной как совокупность подмножеств множества двух точечных элементов α, β – индексов рассматриваемых квантовых состояний – с операцией сложения подмножеств в виде их суммы и операцией произведения в виде их пересечения. Такая алгебра отображает на данном сверхупрощенном примере классическую (двузначную, или аристотелеву [15]) логику, лежащую в основе классической физики, в которой справедлив закон исключенного третьего "*либо a, либо не –a*". В данном примере в терминах индексов он выражается соотношением

$$\alpha \cup \beta = \mathcal{M},$$

а в терминах самих состояний –

$$\mathrm{sp}(|\alpha\rangle, |\beta\rangle) = H,$$

где $|\beta\rangle$ имеет логический смысл отрицания события $|\alpha\rangle$, а H имеет смысл заведомо достоверного события, которому принадлежат и оба рассматриваемые элементарные события $|\alpha\rangle$, $|\beta\rangle$. Если же взять два неортогональных состояния, то в соотношении $\mathrm{sp}(|\alpha\rangle, |\beta\rangle) = H$ состояние $|\beta\rangle$ не будет отрицанием $|\alpha\rangle$, поскольку включает ненулевую проекцию на него наряду с бесконечным множеством других состояний $|\gamma\rangle$, существование которых диктуется принципом суперпозиции. В этом случае $|\alpha\rangle$ и $|\beta\rangle$ являются, соответственно, собственными векторами двух *некоммутирующих* операторов $\hat{A}$, $\hat{B}$ некоторых физических величин, которые именно по причине неортогональности их собственных квантовых состояний не могут быть измерены совместно. Наборы квантовых состояний, соответствующих принятию этими физическими величинами их возможных значений, являются *несовместимыми*, так как не могут рассматриваться одновременно в рамках классической логики.

Даже приведенное простейшее обсуждение выявляет теснейшую связь соотношений между физическими величинами с соотношениями между соответствующими им квантовыми состояниями. Выявление соотношений непосредственно между состояниями и количественное измерение соответствующей информации, заложенной в этих соотношениях, является объектом теории информации. Цель данной работы – рассмотреть проблему выбора адекватной количественной меры квантовой информации и ее возможную роль в физике на основе анализа ряда базовых физических моделей квантовых систем и схем физического эксперимента с учетом наличия или отсутствия *несовместимости* квантовых состояний – их единственной фундаментальной особенности, из которой вытекает все многообразие квантовых эффектов. В разд. 1 на основе данного критерия введена наиболее общая классификация основных типов квантовой информации и соответствующих количественных мер. В разд. 2, 3 рассмотрены последовательно когерентная и совместимая информация, а в разд. 4 – тесно связанная с последним типом квантовой информации проблема количественного описания информационной эффективности заданной схемы физического эксперимента.

1. НЕСОВМЕСТИМОСТЬ КВАНТОВЫХ СОБЫТИЙ – КЛЮЧ К НЕКЛАССИЧЕСКОЙ СПЕЦИФИКЕ И КЛАССИФИКАЦИИ КВАНТОВОЙ ИНФОРМАЦИИ

Понятие квантовой информации непосредственно связано с основными законами квантовой физики и, возникнув параллельно с их становлением, играет ключевую роль в их интерпретации. Любой квантовый эффект, например, существенно микроскопический процесс спонтанного излучения атома или макроскопический переход в сверхпроводящее состояние может быть явно связан с процессами преобразования квантовой информации, если только адекватно связать эту информацию с соответствующими ансамблями квантовых состояний. Можно также утверждать, что прообраз квантовой теории информации возник раньше классической теории информации Шеннона – достаточно вспомнить борновскую интерпретацию физического смысла волновой функции или проанализировать информационное содержание постулата квантового измерения (“коллапса волновой функции”) [16].

Хотя важность самого понятия квантовой информации и была признана давно, интерес к ее практическому использованию возник лишь недавно благодаря развитию современных экспериментальных методов квантовой оптики, позволяющих осуществлять контроль и управление состояниями квантовых систем. Это позволило использовать квантовую информацию не только как полезное абстрактное понятие, но и свободно манипулировать ею в реальных экспериментах. Изучение проблем, связанных с обработкой квантовой информации, привело к возникновению нового раздела физики – физики квантовой информации, становление которой можно проследить по библиографическому указателю [17].

Исходя из общепринятого изложения квантовой механики [16, 18–20], можно предположить, что “истинная физика” должна иметь дело лишь с квантовыми физическими величинами, в то время как рассмотрение квантовых состояний безотносительно к конкретным физическим переменным может быть скорее предметом математических дисциплин, к которым, например, относят иногда и классическую теорию информации. Однако при более внимательном обсуждении ситуации с этим трудно согласиться: как только квантовые состояния соотнесены с собственными состояниями физических переменных реальной квантовой модели, они становятся носителями физически содержательной информации. Рассмотрим, например, математическую структуру самосопряженных операторов $\hat{A}$ в гильбертовом пространстве H, используемых в квантовой механике для представления физических переменных. Тогда спектральное разложение оператора $\hat{A} = \sum \lambda_n |n\rangle\langle n|$ описывает его расщепление на два типа математических объектов: λ_n – набор физически возможных значений, и $|n\rangle$ – набор соответствующих квантовых состояний. Последние содержат физическую информацию наиболее общего вида, не связанную со специфическими значениями величин λ_n, а характеризующую лишь сами физические события, состоящие в том, что физическая величина приняла одно из этих значений.

Информационные соотношения между квантовыми состояниями определяются динамическими свойствами физической системы и, очевидно, являются наиболее фундаментальным проявлением ее динамических характеристик. Они могут характеризовать как собственную динамику некоторой квантовой системы, так и ее взаимодействие с другими системами. Исходно они представляются уравнениями для волновых функций или операторов квантовых состояний, а суть теоретико-информационного подхода состоит во введении адекватной количественной меры информационного обмена. Ее использование для обсуждения общих динамических свойств квантовой системы может иметь определенные преимущества перед рассмотрением конкретных физических переменных, будучи в общем случае не связанной с конкретизацией их выбора.

До тех пор, пока не обсуждается конкретная схема физического эксперимента, описание квантовой системы сводится именно к выявлению ее информационных характеристик, количественно выражающих соотношения между квантовыми состояниями данной системы и состояниями других систем, с которыми она может взаимодействовать. Например, основное информационное содержание процесса излучения двухуровневого атома сводится к тому, что заложенная в нем квантовая информация переходит к соответствующему кванту фотонного поля. При этом данный квант получает информацию о фазе исходного атомного состояния, т.е. информационный обмен является специфически квантовым, сохраняющим когерентность между трансформируемыми волновыми функциями (см. разд. 2). Таким образом, информационная картина несколько богаче ее описания в терминах энергетического обмена атом–поле.

Фундаментальная концепция информационной меры классической информации вводится в теории информации, созданной Шенноном [21, 22]. Для классических систем физических событий можно ввести единую количественную меру объема информации, не зависящую от ее конкретного физического содержания и цели использования и позволяющую для объединения многих каналов с помехами выразить асимптотически достижимый уровень объема безошибочно передаваемой информации как оптимизированное значение шенноновского количества информации. Эта элегантная теория основана на специфическом свойстве классических ансамблей, которое исключено из исходных принципов квантовой физики. Этим свойством является *воспроизводимость* классических событий: статистически нет никакого различия, имеете ли вы на входе и выходе физически одну и ту же систему или ее информационно эквивалентную копию. Однако именно последнее невозможно в квантовом мире, и, очевидно, с этим обстоятельством связано возникновение дискуссии о том, может ли вообще информационная мера Шеннона каким-либо образом использоваться применительно к квантовым системам [23–25].

Как показано в данной работе, традиционное определение энтропии Шеннона и соответствующей информационной меры может быть с успехом использовано и для анализа квантовых систем при условии корректного учета фундаментальных различий между ансамблями классических и квантовых событий.

Специфика квантовой теории состоит в принципе суперпозиции квантовых состояний – существования наряду с состояниями $|\alpha\rangle$, $|\beta\rangle$ и их произвольной линейной комбинации $c_1|\alpha\rangle + c_2|\beta\rangle$, что приводит к появлению в любой квантовой системе континуального множества – гильбертова пространства состояний $H \ni \psi$, подавляющая часть которых не совпадает ни с одним из ортогональных базисных состояний $|n\rangle$, связанных с некоторой физической величиной, описываемой оператором $\hat{A} = \sum \lambda_n |n\rangle\langle n|$. Выполнение преобразований над квантовой системой преобразует не только базисные векторы, но и все гильбертово пространство. Это обстоятельство используется в алгоритмах квантовых вычислений и радикально повышает их эффективность за счет высокой степени параллелизма выполняемых операций [3, 4, 13]. Однако данное континуальное множество состояний не содержит неограниченного объема информации в ее обычном классическом понимании.

Дело в том, что отличить с абсолютной надежностью одно произвольное квантовое состояние $|\alpha\rangle \in H$ от другого $|\beta\rangle$ можно только для ортогональных состояний. Вероятность же случайного совпадения двух произвольно взятых состояний определяется квадратом модуля скалярного произведения, так что двумерная плотность вероятности двух равновероятно выбранных состояний имеет вид

$$P(d\alpha, d\beta) = |\langle\alpha|\beta\rangle|^2 \frac{dV_\alpha dV_\beta}{D}, \qquad (1)$$

где dV_α, dV_β – дифференциалы объема на сфере волновых функций, удовлетворяющие условию нормировки $\int |\alpha\rangle\langle\alpha| dV_\alpha = \hat{I}$, а D – размерность пространства H. Теория информации Шеннона позволяет рассчитать эффективное число N_α состояний α, различаемых переменной β и наоборот [26]. Распределение вероятностей (1) описывает информационный обмен между двумя информационными переменными α и β, а в соответствии с теорией Шеннона он характеризуется эффективным числом N_α (достигаемым в расчете на один символ при рассмотрении бесконечно длинных последовательностей с независимо передаваемыми единичными символами) безошибочно переданных сообщений, сформированных из подмножеств A_α значений индексов квантовых состояний α. Если сопоставить каждому A_α наиболее подходящие состояния α, то все эти состояния будут безошибочно (в оговоренном смысле) различены, так что N_α и есть число раз-

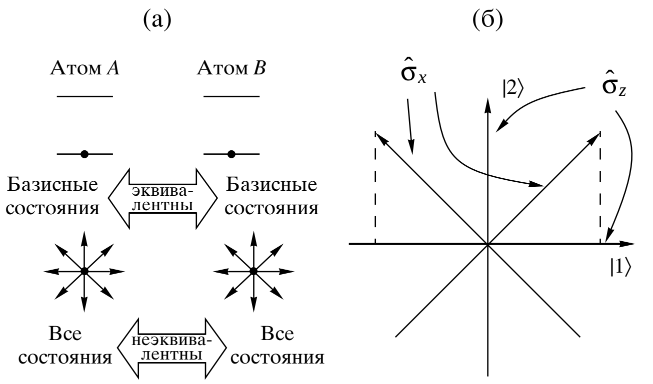

Рис. 1. Проявления несовместимости неортогональных квантовых состояний. а – Эквивалентность совместимых ансамблей базисных состояний и неэквивалентность внутренне несовместимых полных ансамблей квантовых состояний двух двухуровневых атомов. б – Вакуумные флуктуации как результат несовместимости.

личимых состояний. Оно определяется соответствующим количеством информации Шеннона

$$I_{\alpha\beta} = \int \log_2 \frac{P(d\alpha, d\beta)}{P(d\alpha)P(d\beta)} P(d\alpha, d\beta)$$

по формуле $N_\alpha = 2^{I_{\alpha\beta}}$. Для совместного распределения вероятностей (1) согласно [27] $I_{\alpha\beta} = 1 - 1/\ln 4 \simeq \simeq 0.27865$ бит для $D = 2$ и $I_{\alpha\beta} = (1 - \mathbf{C})/\ln 2 \simeq 0.60995$ бит ($\mathbf{C}$ – постоянная Эйлера) для $D \longrightarrow \infty$. Таким образом, при любой размерности пространства D имеем $N_\alpha < 2$, т.е. квантовая неопределенность уменьшает эффективное число различимых состояний даже ниже значения 2, соответствующего одному биту. Это связано с наличием большой квантовой неопределенности в чистых состояниях ψ, которые, с одной стороны, являются аналогами детерминированных классических состояний при рассмотрении только их ортогональных наборов, а с другой – содержат внутреннюю квантовую неопределенность, допуская возможность существования иных неортогональных состояний и определяя соответствующие распределения вероятностей $P(x) = |\psi(x)|^2$ для переменных $\hat{x}$, для которых ψ не является собственной функцией. В частности, соответствующая энтропия чистого N -частичного состояния $\Psi_N = \psi \otimes \ldots \otimes \psi$ при $N \longrightarrow \infty$ асимптотически совпадает с $N\log_2 D$, т.е. чистый характер состояния при больших N почти не отражается на величине неопределенности всех квантовых состояний, максимум которой достигается для смешанного состояния $\hat{I} \otimes \ldots \otimes \hat{I}/D^N$ с максимальной неопределенностью $N\log_2 D$ бит.

Таким образом, первая особенность квантовой информации, обусловленная несовместимостью неортогональных квантовых состояний, состоит в невозможности извлечения сколько-нибудь существенного объема информации при наличии пространств большой размерности D в отсутствие какой-либо селекции состояний. Подобная селекция квантовой информации всегда должна присутствовать в каналах ее передачи, обеспечивающих преобразование значительных объемов квантовой информации в различимой форме.

Рассмотрим простой пример, поясняющий качественную специфику квантовых систем, обусловленную несовместимостью всех квантовых состояний. Пусть имеются два двухуровневых атома в одном и том же состоянии (рис. 1а). Качественное содержание выражения “в одном и том же” в случае квантовых систем, несмотря на прозрачность его “операционного” смысла, существенно не совпадает с его содержанием в классическом случае. В данном примере при его классическом рассмотрении во внимание принимаются, скажем, только два базисных состояния $k = 1, 2$ каждого атома. Тогда при описании статистики этих атомных состояний нет разницы, считать ли их принадлежащими различным атомам или одному и тому же атому. Дело в том, что в составной системе лишь одно состояние имеет ненулевую вероятность и знание состояния k каждого атома соответствует точному знанию возможного состояния другого атома. Таким образом, в классическом случае – при рассмотрении только населенностей – атомы могут быть эквивалентными копиями друг друга.

В квантовом же случае такое копирование всех квантовых состояний невозможно. Наряду с указанными двумя состояниями в атоме существуют и другие состояния $|\alpha\rangle$, имеющие ненулевые вероятности $|\langle\alpha|k\rangle|^2$, возникающие при усреднении физических величин, для которых $|k\rangle$ не является собственным базисом. Это отражает квантовую неопределенность, всегда присутствующей в ансамблях квантовых состояний (рис 1б). Хорошо известно, что эта неопределенность для гармонического осциллятора проявляется в ненулевой энергии вакуумных флуктуаций $\hbar\omega/2$. Для двухуровневых атомов она принимает форму ненулевых значений $\hat{\sigma}_x^2 = \hat{\sigma}_y^2 = \hat{I}$, где матрицы Паули $\hat{\sigma}_{x,y}$ имеют смысл квадратурных косинус- и синус-компонент атомных осцилляторов. Но несмотря на то, что атомы находятся “в одном и том же” состоянии, соответствующие им собственные состояния для двух рассматриваемых атомов не совпадают, поскольку это состояние относится к различным физическим системам, каждая из которых содержит свой ансамбль несовместимых между собой квантовых состояний (т.е. описываемых неортогональными собственными векторами, соответствующими различным некоммутирующим операторам физических переменных, как показано на рис. 1б). Действительно, среднеквадратичные разности $(\hat{\sigma}_x^A - \hat{\sigma}_x^B)^2$, $(\hat{\sigma}_y^A - \hat{\sigma}_y^B)^2$ отличны от нуля вследствие некоммутативности их операторов с оператором разности населенностей $\hat{\sigma}_z$, которому соответствует строго нулевая разность $\hat{\sigma}_z^A - \hat{\sigma}_z^B$. Это и означает, что собственные состояния этих квантовых переменных для рассматриваемых атомов не совпадают, т.е. далеко не все их взаимно соответствующие квантовые состояния являются копией друг друга.

Из этого простого частного примера следует важный общий вывод, что при наличии несовместимости, т.е. неортогональности в рассматриваемых ансамблях квантовых состояний двух различных атомов эти ансамбли всегда различны. Следовательно, информация, получаемая о состояниях квантовой системы в некоторый момент времени посредством любой другой системы, рассматриваемой в этот же момент времени, никогда не может быть полной. Чтобы иметь полную квантовую информацию о всех квантовых состояниях системы в данный момент времени, надо иметь в своем распоряжении саму эту систему. Появиться же в полном объеме в каком-либо новом месте (или в другой момент времени) эта информация может лишь одновременно с автоматическим уничтожением в исходном месте, что и происходит, например, при ее телепортации [2]. Телепортировать же квантовую информацию можно только к одному получателю, с чем и связана возможность создания абсолютно застрахованной от перехвата секретной связи, основанной на методах квантовой криптографии.

Данные качественные соображения относительно уникальности квантовой информации подкреплены количественным их выражением в форме строгой положительности проинтегрированного по всем возможным волновым функциям оператора квадрата разности проекторов на взаимно соответствующие волновые функции двух атомов, рассматриваемых в один и тот же момент времени:

$$\hat{\varepsilon} = \int (|\alpha\rangle\langle\alpha| \otimes \hat{I}_B - \hat{I}_A \otimes |\alpha\rangle\langle\alpha|)^2 \frac{dV_\alpha}{D} = \\ = \|0\rangle\rangle\langle\langle 0\| + \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3} \|k\rangle\rangle\langle\langle k\| \geqq \frac{1}{3}, \quad (2)$$

где интегрирование выполняется по сфере Блоха, включающей состояния $|\alpha\rangle$ с индексом $\alpha = (\varphi, \vartheta)$, дифференциалом объема $dV_\alpha = \sin\vartheta d\vartheta d\varphi/(2\pi)$ и полным объемом интегрирования $V_\alpha = D = 2$. Это выражение аналогично соответствующему классическому выражению для среднеквадратичного расхождения

$$\varepsilon = \sum_\xi (\delta_{\xi_A \xi} - \delta_{\xi_B \xi})^2$$

классических индикаторов $\delta_{\xi_A \xi}$, $\delta_{\xi_A \xi}$ событий $\xi_A = \xi$ и $\xi_B = \xi$, связанных с двумя случайными величинами ξ_A и ξ_B. Для любого совместного распределения вероятностей вида $P(\xi_A, \xi_B) = P(\xi_A)\delta_{\xi_A \xi_B}$, которое описывает всюду совпадающие случайные величины, среднее значение случайной функции ε обращается в нуль, т.е. для таких распределений вероятностей все события $\xi_A = \xi$ и $\xi_B = \xi$ реализуются одновременно и эти две величины являются копией друг друга. Двухчастичный же оператор (2), являющийся точным квантовым аналогом расхождения двух ансамблей классических событий, имеет два собственных подпространства, образованных из синглетного и триплетного состояний Белла $\|k\rangle\rangle$ и соответствующих собственным значениям среднеквадратичной разности $\varepsilon_k = 1$, 1/3. Значение, соответствующее синглетному состоянию, в 3 раза больше значения, соответствующего трехкратно вырожденному триплетному состоянию. Строгая положительность данного оператора, т.е. отсутствие нулевого собственного значения, означает, что для любой совместной матрицы плотности результат его усреднения, определяющий среднеквадратичное несовпадение всех квантовых состояний, отличен от нуля. Это означает невозможность взаимного копирования всех квантовых состояний различных систем, в каком бы состоянии они ни находились.

В связи с этим становится очевидным, что ключевое различие между классической и квантовой информацией определяется *совместимостью* или *несовместимостью* состояний, с которыми связана представляющая интерес информация. Состояния различных систем, рассматриваемых в один и тот же момент времени, всегда совместимы. Следовательно, они не могут копировать друг друга, если содержат внутренне несовместимые состояния. И наоборот, рассматриваемые в два различных момента времени полные ансамбли квантовых состояний одной и той же системы, чаще всего несовместимы и, более того, в отсутствие шумов могут копировать друг друга, в каждый момент времени сохраняя уникальность своих квантовых флуктуаций. Разномоментные же состояния двух различных систем могут быть как совместимы, так и несовместимы, в зависимости от вида преобразования, связывающего эти два момента времени. Этот фактор весьма существен при рассмотрении основных определений количественных мер квантовой информации (см. разд. 2 и 3).

Таким образом, наиболее фундаментальная классификация квантовой информации связана с описанным свойством совместимости/несовместимости рассматриваемых ансамблей состояний. В результате выделяются следующие четыре основных типа информации.

1. *Классическая информация* – все состояния совместимы, и в исходной форме теории информации Шеннона рассматриваются как классические "по умолчанию" [21, 22]. Отметим, однако, что классическая информация всегда может быть передана по квантовому каналу и также представляет определенный интерес в квантовой физике. Классический канал задается условным распределением вероятностей $p(y|x)$ состояний выхода y при фиксированных состояниях входа x.

2. *Полуклассическая информация* – вся информация на входе задается классическими состояниями λ, а состояния выхода содержат внутреннюю квантовую несовместимость как квантовые состояния в гильбертовом пространстве H, которые, тем не менее, автоматически совместимы с состояниями входа. Квантовый канал в общем случае описывается ансамблем смешанных квантовых состояний $\hat{\rho}_\lambda$, зависящих от классического параметра λ [28, 29]. Переменные λ эквивалентны входным переменным x, множество всех волновых функций $\psi \in H$ – выходным состояниям y, а матрица плотности $\hat{\rho}_\lambda$ – условному распределению вероятностей $p(y|x)$ классического канала.

3. *Когерентная информация* – пространства состояния входа и выхода содержат как внутреннюю квантовую несовместимость, так и несовместимы взаимно, будучи связанными супероператором канала $\mathcal{N}$, преобразующим матрицу плотности входа в матрицу плотности выхода: $\hat{\rho}_B = \mathcal{N}\hat{\rho}_A$ [30, 31]. Преобразование $\mathcal{N}$ определяет поток квантово несовместимых состояний от входа канала к его выходу и является полностью квантовым аналогом классического условного распределения $p(y|x)$, которое осуществляет аналогичное линейное преобразование классического входного распределения вероятностей $p(x)$ в выходное распределение $p(y)$.

4. *Совместимая информация* – вход и выход содержат внутренне несовместимые состояния, но взаимно совместимы.

В то время как три первых типа информации хорошо известны [22, 28, 30], включая относительно недавно введенную меру когерентной информации, совместимая информация как особый тип информационной меры в явной форме введена лишь в самое последнее время [32]. Она определяется для составной двухчастичной системы с совместимыми входом и выходом, включающими внутреннюю квантовую несовместимость.

Когерентная и совместимая информация исчерпывают все возможные качественно различные типы информации в полностью квантовых каналах. Выполненный в рамках данной работы анализ возможностей применения информационного подхода к реальным экспериментам показывает, что только совместимая информация является адекватной для анализа информационной эффективности абстрактно определенной схемы квантового физического эксперимента.

2. КОГЕРЕНТНАЯ ИНФОРМАЦИЯ

А. Физический смысл когерентной информации

В соответствии с приведенной в разд. 1 классификацией одной из возможных количественных мер информации для полностью квантового канала является *когерентная информация*, введенная в работах Шумахера и Ллойда [30, 31]. Она служит количественной мерой объема несовместимой информации, которая передана от одного пространства состояний к другому. При этом можно рассматривать как случай одного и того же пространства состояний, так и случай физически различных пространств. Простейшим примером обмена когерентной информацией является динамическая эволюция замкнутой системы, описываемая унитарным оператором U, $\hat{\rho}_B = U\hat{\rho}_A U^{-1}$. При этом все чистые состояния ψ, допускаемые начальной матрицей плотности $\hat{\rho}_A$, передаются без искажения и объем переданной когерентной информации I_c совпадает с ее исходным объемом. Последний же по определению измеряется энтропией фон Неймана $S[\hat{\rho}_B] = S[\hat{\rho}_A]$, т.е. соответствующая когерентная информация описывается выражением

$$I_c = -\mathrm{Tr}\hat{\rho}_A \log\hat{\rho}_A. \tag{3}$$

Данное определение, однако, требует дополнительной аргументации в терминах, раскрывающих операционный смысл матрицы плотности, которая в самосогласованной квантовой теории возникает лишь как результат усреднения чистого состояния составной системы по вспомогательным переменным. Тогда выражение (3) следует рассматривать как перепутанность входной системы A с *опорной* системой R для соответствующим образом подобранного чистого состояния Ψ_{AR}, $\mathrm{Tr}_R|\Psi_{AR}\rangle\langle\Psi_{AR}| = \hat{\rho}_A$ составной системы $A + R$. Тем самым измерение когерентной информации выполняется в терминах взаимно совместимых состояний двух различных систем, A и R, в то время как перенос информации имеет место от входа A к выходу B, причем в рассмотренном случае последний отличается от A лишь унитарным преобразованием.

Чтобы завершить описание общей структуры информационной системы, следует дополнить ее информационным каналом $\mathcal{N}$ с соответствующим шумовым *окружением* E (рис. 2а) [33].

Определение когерентной информации для канала общего типа выглядит следующим образом [33]:

$$I_c = S[\hat{\rho}_B] - S[(\mathcal{N} \otimes \mathcal{I})|\Psi_{AR}\rangle\langle\Psi_{AR}|], \quad (4)$$

что имеет определенную преемственность с определением классической информации Шеннона [34]. Здесь $\mathcal{I}$ обозначает единичный супероператор, применяемый к переменным опорной системы и оставляющий их неизменными. Второй член в этом выражении описывает *энтропию обмена*, которая отлична от нуля только в результате взаимодействия подсистем $A + R$ и E при $\mathcal{N} \neq \mathcal{I}$. Супероператор канала $\mathcal{N}$ преобразует состояния входа A в соответствии с соотношением

$$\hat{\rho}_B = \mathcal{N}\hat{\rho}_A = \mathrm{Tr}_R\hat{\rho}_{BR}, \quad \hat{\rho}_{BR} = (\mathcal{N} \otimes \mathcal{I})|\Psi_{AR}\rangle\langle\Psi_{AR}| \quad (5)$$

в состояния выхода B, все квантовые состояния которого по-прежнему совместимы с состояниями опорной системы R, поскольку в процессе данного преобразования перепутывания этих подсистем не происходит. Это позволяет рассматривать B и R как кинематически независимые системы, описываемые совместной матрицей плотности $\hat{\rho}_{BR}$. С учетом этого обстоятельства и нулевой по предположению энтропии составной системы $R + B + E$ соотношение (4) можно рассматривать как меру перепутанности между выходом B и составной системой $R + E$, уменьшенную на величину энтропии обмена между каналом $A \longrightarrow B$ и шумовым окружением E. Таким образом, обсуждая физическое содержание когерентной информации, в соответствии с (4) можно сказать, что она не является непосредственно мерой потока квантово несовместимых состояний от A к B, а служит специфической мерой *сохраненной* перепутанности между *совместимыми* системами R и A, которая остается после передачи информации по каналу $A \longrightarrow B$. В общем случае выход B может быть физически отличен от A и даже описываться гильбертовым пространством существенно иной размерности, $H_B \neq H_A$ [35, 36], что и продемонстрировано на физическом примере информационной системы, представленной на рис. 2б.

Для нее вход A и опорная система R соответствуют основным двухуровневым состояниям двух перепутанных атомных Λ-систем, информационный канал $\mathcal{N}$ обеспечивается лазерным возбуждением входной системы A на радиационно активный верхний уровень. Два излученных фотона в совокупности с вакуумным состоянием соответствуют выходу B, в то время как все остальные степени свободы поля в сочетании с возбужденным состоянием атома образуют шумовое окружение E.

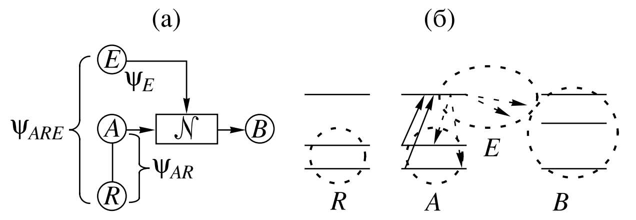

Рис. 2. Схема квантовой информационной системы (а) и пример ее физической реализации (б): A и B – вход и выход; R – опорная система, $\mathcal{N}$ – канал с шумовым окружением E.

Поскольку простейшим носителем квантовой информации является двухуровневая система – аналог классического бита, традиционно называемого *кубитом*[1], – то соответствующую ей количественную меру специфически квантовой когерентной информации имеет смысл также называть кубитом. Этому выбору единицы когерентной информации, очевидно, в определении (3) соответствует использование логарифма по основанию 2, что и дает $I_c = 1$ кубит для случая двухуровневой системы с матрицей плотности вида $\hat{I}/2$, соответствующей состоянию с максимально возможной квантовой энтропией, в котором максимально и равноправно представлены все возможные квантовые состояния.

Попытаемся теперь ответить на вопрос, как количественная мера когерентной информации может быть использована в физике? Квантовая теория обычно применяется к вычислению некоторых средних значений вида $\langle\hat{A}\rangle = \sum\lambda_n\langle|n\rangle\langle n|\rangle$, где λ_n и $|n\rangle$ – собственные значения и собственные векторы оператора $\hat{A}$ соответственно. Это разложение представляет усреднение физических величин в терминах вероятностей $P_n^A = \langle|n\rangle\langle n|\rangle$ квантовых состояний $|n\rangle$. С учетом того, что существует бесконечное множество всех возможных переменных и это множество значительно богаче, чем множество всех квантовых состояний, описание соотношений между физическими состояниями – безотносительно к физическим значениям – обеспечивает более общую информацию о физических связях и в более экономной форме. Закономерности обмена когерентной информацией отображают физические соотношения в наиболее общей форме, поскольку они связаны с наиболее общими свойствами взаимодействия между двумя квантовыми системами, выбранными в качестве входа и выхода и связанными однозначным преобразованием всех возможных смешанных состояний входа. В действительности зависимость когерентной информации

[1] Термин кубит был впервые введен Б. Шумахером в 1995 г.

от параметров информационной системы имеет даже более фундаментальный характер, чем соотношения между конкретными физическими величинами. Ее расчет для ряда фундаментальных моделей, широко используемых в квантовой физике, выполнен в [34–36].

В качестве примера рассмотрим хорошо известную проблему Дике [37], в которой информационный обмен между атомами демонстрирует динамику того же самого осцилляционного типа [35], что и энергетический обмен посредством излучаемых фотонов, определяющий специфику радиационного затухания в системе двух двухуровневых атомов. При этом осцилляторная динамика характерна не только для энергии, но также и для множества других переменных. Следовательно, для описания общих свойств межатомного взаимодействия имеет смысл вместо множества различных физических переменных рассматривать именно когерентную информацию как меру сохраненной перепутанности. Последняя, в свою очередь, является характеристикой обмена внутренней квантовой несовместимостью между взаимно совместимыми множествами состояний опорной и входной систем, H_R и H_A. В задаче Дике когерентный характер информации отчетливо проявляется в ее зависимости от времени при большой разнице в скоростях распада короткоживущего и долгоживущего состояний Дике. Когерентность межатомного обмена реализуется когерентными осцилляциями между обеими этими компонентами, поэтому время жизни когерентной информации определяется короткоживущей компонентой – в отличие, например, от населенности атомов, время жизни которой определяется долгоживущим состоянием.

В отличие от других типов квантовой информации, когерентная информация позволяет различать два качественно различных класса информационного обмена, соответствующих обмену посредством классической информации и квантового перепутывания состояний. Когерентная информация является ненулевой только в последнем случае. Поэтому именно когерентная информация адекватна для обсуждения вопроса, в какой степени квантовый канал передачи информации сохраняет способность использовать выход как эквивалент входа для реализации задач, в которых существенна именно квантовая специфика входного сигнала. Данной проблематике посвящено большое количество современных публикаций (см. [13] и приведенную там библиографию). Являясь мерой сохраненной перепутанности квантовой системы после выполнения физического преобразования, когерентная информация в настоящее время представляет и определенный практический интерес в связи с задачами передачи и обработки квантовой информации, так же как и ее применение к анализу конкретных физических моделей квантовых каналов (один из примеров такого анализа приведен далее).

Б. Одномоментная когерентная информация

Исходя из формальных математических аналогий, первый шаг к информационному описанию двусторонне квантового канала может быть сделан путем формального квантового обобщения классической взаимной информации Шеннона $I = S_A + S_B - S_{AB}$:

$$I = S[\hat{\rho}_A] + S[\hat{\rho}_B] - S[\hat{\rho}_{AB}]. \qquad (6)$$

Это обобщение имеет смысл лишь в том случае, если задана совместная матрица плотности $\hat{\rho}_{AB}$, которая рассматривается как прямой аналог классического совместного распределения вероятностей P_{AB} [38].

Очевидно, для применения формулы (6) к квантовым системам необходимо предположить, что состояния систем A и B взаимно совместимы. Это заведомо справедливо для одномоментных состояний соответствующих физических систем, если только они не являются перекрывающимися частями одной и той же квантовой системы, включающей и вход, и выход[2]. Это соображение и является стимулом для выбора термина “одномоментная" для информации, задаваемой в терминах совместной матрицы плотности как исходной характеристики. Хотя использование выражения (6) как определения квантовой информации I формально возможно, его физическое содержание до сих пор остается неясным [40, 41]. Это можно объяснить, если вспомнить основное качественное различие между классическим и квантовым информационными каналами. В общем случае из соотношения (5) следует, что квантовые вход и выход несовместимы, как это, например, имеет место для состояний одной и той же квантовой системы, рассматриваемой в два различных момента времени. Тем самым, A и B в выражении (6) не могут быть теми входом и выходом, которые рассматриваются в определении когерентной информации, поэтому в квантовом случае для использования матрицы плотности $\hat{\rho}_{AB}$ необходима физическая конкретизация систем A и B. Это можно сделать на основе определения когерентной информации Шумахера, что неиз-

[2] Подобное обобщенное понимание когерентной информации и ее расчет для конкретных систем, как показано в [35], также возможны. В случае систем, движущихся с релятивистскими скоростями, здесь очевидна необходимость соответствующих релятивистских уточнений. Такие ситуации становятся актуальными в связи с современными экспериментами с квантовыми перепутанными состояниями [39], в которых регистрируются эффекты, связанные с движением измерительной системы.

бежно связано с модификацией самого выражения (6).

Адекватной физической интерпретацией системы A является ее отождествление с опорной системой, а системы B – с выходом некоторого квантового канала, отвечающего заданной совместной матрице плотности $\hat{\rho}_{AB}$, как это показано на рис. 3. При этом они автоматически будут совместимыми. Соответственно, реальный вход канала, описанного выше, соответствует не системе A, а некоторому состоянию входа B_0 в начальный момент времени, которому соответствует не искаженная каналом информация об A, преобразуемая каналом $\mathcal{N}$ в конечное состояние выхода B. При этом B_0 и канал $\mathcal{N}$ не вводятся явным образом, а отображаются через результат их проявления в виде матрицы плотности $\hat{\rho}_{AB}$, связывающей выход и опорную систему. Для правильного соответствия заданной матрицы плотности $\hat{\rho}_{AB}$ ее аналогу – матрице плотности $\hat{\rho}_{BR}$ в (5) в конструкции Шумахера – состояние системы вход–опорная система должно быть чистым и описываться такой функцией Ψ_{AB_0}, чтобы для некоторого канала $\mathcal{N}$ выполнялось соотношение

$$\hat{\rho}_{AB} = (\mathcal{I} \otimes \mathcal{N})|\Psi_{AB_0}\rangle\langle\Psi_{AB_0}|. \tag{7}$$

Это автоматически обеспечивает представимость матрицы плотности

$$\hat{\rho}_A = \mathrm{Tr}_{B_0}|\Psi_{AB_0}\rangle\langle\Psi_{AB_0}|$$

опорной системы как соответствующей частичной матрицы плотности $\mathrm{Tr}_B\hat{\rho}_{AB}$ системы $A+B$, если учесть, что след по B_0 в соотношении (7) инвариантен относительно $\mathcal{N}$, поскольку данное преобразование не затрагивает подсистемы A.

С учетом этого соответствующая *одномоментная* когерентная информация может быть определена как когерентная информация Шумахера

$$I_c = S[\hat{\rho}_B] - S[\hat{\rho}_{AB}], \tag{8}$$

которая, в отличие от информационной меры (6), не содержит члена $S[\hat{\rho}_A]$. Как видно из данного описания, термин “одномоментная” в общем случае не имеет прямого значения в том смысле, что он определяет связь между состояниями систем, относящихся к одному и тому же моменту времени. Реально опорная система A и выход B могут рассматриваться в различные моменты времени, а единственно важным условием является их *совместимость*. Одномоментная информация, таким образом, связывает две совместимые квантовые системы, все физические переменные которых взаимно совместимы, т.е. описываются коммутирующими операторами – в противоположность когерентной информации, связывающей в общем случае несовместимые вход и выход.

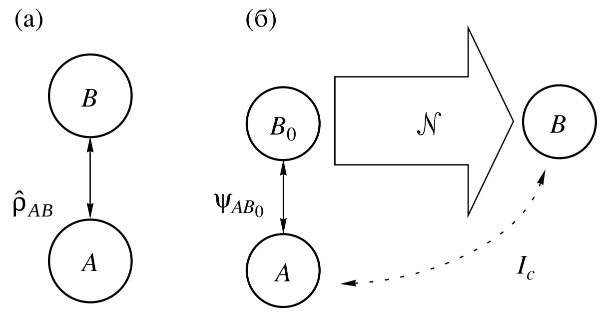

Рис. 3. Реконструкция квантовой информационной системы, соответствующей заданной совместной матрице плотности $\hat{\rho}_{AB}$: математическое описание канала, задающего одномоментную информацию (а) и ее соответствие с конструкцией Шумахера [33] (б).

Одномоментная информация (8), будучи иным представлением когерентной информации, в противоположность информации (6), не является симметричной по отношению к A и B. Более того, когерентная информация может принимать и отрицательные значения. Последнее очевидно для матриц плотности $\hat{\rho}_{AB}$, соответствующих чисто классическому информационному обмену между базисными наборами ортогональных состояний, $\hat{\rho}_{AB} = \sum P_{ij}|i\rangle\langle j||j\rangle\langle i|$. Тогда все энтропии редуцируются к классическим энтропиям: $S[\hat{\rho}_{AB}] = S_{AB} = -\sum P_{ij}\log P_{ij}$, $S[\hat{\rho}_B] = S_B = -\sum P_j \log P_j$, и $S_{AB} > S_B$. Отрицательное значение когерентной информации означает, что энтропия обмена настолько велика, что не только уменьшает объем сохраненной информации до нуля, но и превосходит соответствующее критическое значение, и в этом случае имеет смысл полагать $I_c = 0$.

B. Скорость обмена когерентной информацией в Λ-системах

Информационная система, представленная на рис. 2б, играет особую роль в современных приложениях, основанных на неклассических особенностях квантовой информации, таких как квантовая криптография и квантовые вычисления. В качестве базовых элементов в таких приложениях могут быть использованы атомные Λ-системы, которые рассматриваются как перспективные носители элементарных единиц (кубитов) квантовой информации, позволяющие эффективно хранить и с помощью лазерного излучения свободно манипулировать запасенной квантовой информацией [10, 13]. Для данной информационной системы (см. рис. 2б) рассмотрение второй Λ-системы как опорной имеет конкретное физическое основание, поскольку перепутанность двух соответствующих кубитов имеет ясный физический смысл

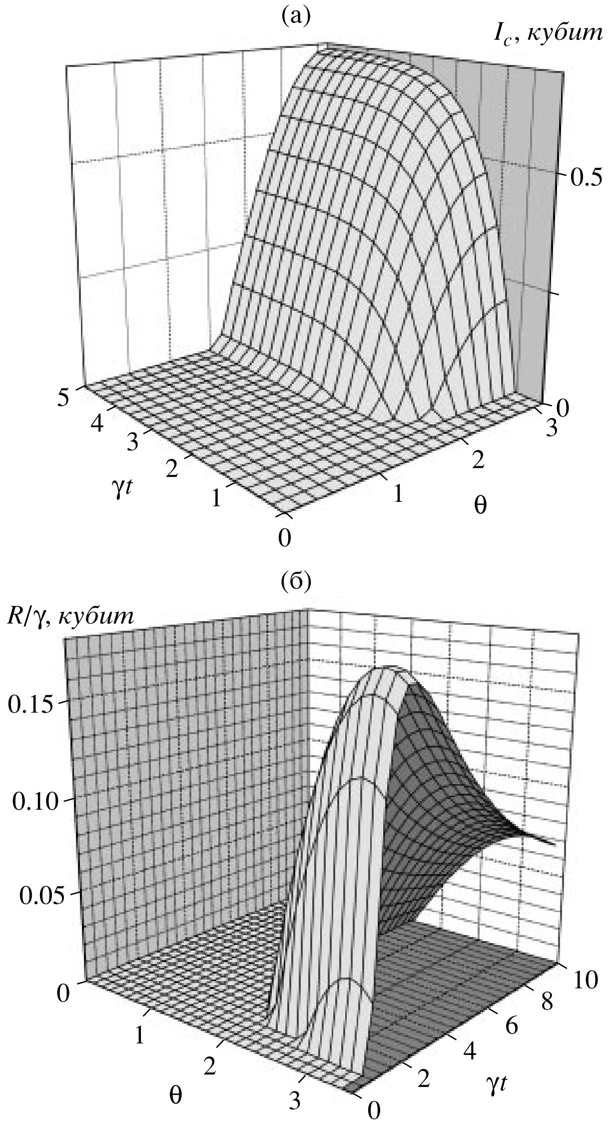

Рис. 4. Когерентная информация I_c в симметричной Λ-системе как функция безразмерного времени γt и угла действия $\theta = \Omega\tau_p$ для входного состояния с максимальной энтропией (γ – скорость радиационного распада, Ω – эффективная частота Раби, τ_p – длительность возбуждающего импульса) [35] (а) и зависимость скорости ее передачи R от длительности цикла t и угла действия θ (б).

как начально запасенная квантовая информация. Последняя может быть применена, например, для реализации базовых логических операций в квантовых вычислениях с использованием выходной системы. Рассмотрение же радиационного канала передачи квантовой информации представляет интерес по той причине, что преобразование начального кубита в фотонное поле дает возможность использования разнообразных возможностей дальнейших преобразований, выполнимых с большой скоростью. В связи с этим возникает вопрос, с какой скоростью информация может быть восстановлена после однократного использования канала кубит–фотонное поле?

Детали расчетов когерентной информации для данного канала изложены в работе [36]. Зависимость когерентной информации от времени и угла действия лазерного поля для симметричной Λ-системы показаны на рис. 4а для состояния входного кубита, взятого в форме состояния с максимальной энтропией $\hat{\rho}_A = \hat{I}/2$, для которого объем когерентной информации не зависит от индивидуальных интенсивностей двух приложенных к Λ-системе резонансных лазерных полей.

Нетрудно видеть непосредственно из рис. 4а, что существует оптимум для уровня информационного обмена $R = I_c/t$, $t = \tau_c$, если использовать информационный канал периодически с длительностью цикла обмена τ_c, так что после каждого цикла начальное состояние мгновенно обновляется. Результаты расчета скорости обмена R для симметричной Λ-системы со скоростями радиационного распада $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ показаны на рис. 4б[3]. Максимально достижимое значение R составляет $R_0 = 0.178\gamma$. Таким образом, процесс информационного обмена атом–фотонное поле устанавливает соответствующий предел для скорости использования когерентной информации, запасенной в Λ-системах, т.е. пропускную способность когерентного информационного канала Λ-система–фотонное поле. Порядок величины этой скорости определяется скоростью радиационного распада возбужденного состояния, в то время как конкретное ее значение зависит от значений скоростей распада $\gamma_{1,2}$ обоих радиационных переходов Λ-системы. В пределе двухуровневой радиационной системы, когда $\gamma_1 = 0$ либо $\gamma_2 = 0$, оптимальная скорость равна 0.316γ.

3. СОВМЕСТИМАЯ ИНФОРМАЦИЯ

При рассмотрении одномоментных средних значений квантовых физических величин внутренняя квантовая несовместимость проявляется просто как статистическая неопределенность, для учета которой достаточно ограничиться введением эквивалентного классического распределения вероятностей. С использованием вероятностной меры

$$P(d\alpha) = \langle\alpha|\hat{\rho}_A|\alpha\rangle dV_\alpha \qquad (9)$$

на множестве всех квантовых состояний среднее значение любого оператора $\hat{A} = \sum \lambda_n |n\rangle\langle n|$ может быть представлено как $\langle\hat{A}\rangle = \sum \lambda_n \, dP/dV_\alpha(\alpha_n)$, где $|\alpha_n\rangle = |n\rangle$. Здесь dV_α описывает дифференциал объема в пространстве физически различных со-

[3] *Бокарев Д.* Частное сообщение. 2001.

стояний D-мерного гильбертова пространства H_A ($\int dV_\alpha = D$), которое для случая кубита, т.е. $D = 2$, представляется сферой Блоха (см. разд. 1). Соотношение (9) есть среднее от операторной меры

$$\hat{E}(d\alpha) = |\alpha\rangle\langle\alpha| dV_\alpha, \tag{10}$$

которая является специальным случаем неортогонального разложения единицы [42], или положительной операторнозначной мерой (ПОМ, POVM) [2, 14].

ПОМ описывают соответствующие процедуры обобщенного квантового измерения. В отличие от прямого измерения в исходной системе, представляемого ортогональным разложением единицы – ортопроекторной мерой в H_A, оно выполняется в составном пространстве $H_A \otimes H_a$ с подходящим дополнительным пространством состояний H_a и совместной матрицей плотности вида $\hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_a$, которая не содержит никакой дополнительной информации об A, помимо информации, уже содержащейся в матрице плотности $\hat{\rho}_A$.

Обобщенное квантовое измерение вида (10) переводит неопределенность, содержащуюся в системе A в форме квантовой несовместимости множества всех ее квантовых состояний, в классическую статистическую неопределенность количественно эквивалентного множества совместимых событий в системе $A + a$. Разумеется, при таком представлении когерентные соотношения, характерные для исходной квантовой системы, преобразуются в соответствующие классические корреляции, которые уже не имеют никакой квантовой специфики. Тем самым результат такого измерения не является эквивалентом исходной системы с точки зрения возможностей выполнения дальнейших квантовых преобразований, что можно считать неизбежной "платой" за представление информации в классической форме, допускающей ее свободное использование. Тем не менее исходные квантовые корреляции учитываются в статистике результирующих классических состояний.

Пусть заданы два гильбертова пространства H_A и H_B соответствующих квантовых систем A, B и задана совместная матрица плотности $\hat{\rho}_{AB}$ в $H_A \otimes H_B$. В частности, они могут соответствовать подсистемам составной системы $A + B$, заданным в один и тот же момент времени t и могут рассматриваться как вход и выход абстрактного квантового канала в реальной физической системе. Определяющим свойством подсистем A и B является их совместимость. Следовательно, совместное измерение, представленное двумя ПОМ как $\hat{E}_A \otimes \hat{E}_B$, не вводит никаких новых корреляций между входом и выходом и может рассматриваться как индикатор информационных соотношений между входом и выходом. Соответствующее совместное распределение вероятностей имеет вид

$$P(d\alpha, d\beta) = \mathrm{Tr}[\hat{E}_A(d\alpha) \otimes \hat{E}_B(d\beta)]\hat{\rho}_{AB}. \tag{11}$$

Тогда информация Шеннона $I = S[P(d\alpha)] + S[P(d\beta)] - S[P(d\alpha, d\beta)]$ определяет количество *совместимой* информации [32, 43].

Физическое содержание совместимой информации зависит от специфического выбора измерительной процедуры и представляет квантовую информацию на выходе, доступную через посредство двух ПОМ, которые селектируют в форме классических носителей α и β информацию о квантовом состоянии входа, поступающую на выход. Как и в случае одномоментной информации, здесь также роль входа A может играть опорная система схемы Шумахера (см. рис. 2а и рис. 3б). Тогда совместная матрица плотности вход–выход $\hat{\rho}_{AB}$ может быть выражена через парциальную матрицу плотности входа и супероператор канала по формуле (7).

Рассмотрим специальный случай, когда α и β индексируют все квантовые состояния в H_A и H_B в соответствии с конкретным видом обеих ПОМ в форме (10). В этом случае совместимая информация распределена по всем квантовым состояниям и ассоциирована со всей внутренней квантовой неопределенностью состояний входа, которая учитывается автоматически в распределении вероятностей (9). В частности, информация, содержащаяся в квантовых корреляциях, имеющих место в случае наличия квантовой перепутанности между A и B, также принята в расчет в совместном распределении вероятностей (11). Кроме того, совместимая информация в данном случае обладает свойством *операционной инвариантности*, введенным в [44], т.е. все некоммутативные физические переменные учитываются в данной информационной мере равноценным образом. Описанное представление квантовой информации посредством классических распределений вероятностей может рассматриваться как развитие представлений квантовой механики в терминах классических физических переменных в приложениях к лазерной физике, обсуждавшееся еще в лекциях Глаубера [45] (см. также [46]).

А. Неселектированная информация

Информацию, соответствующую обобщенному измерению, заданному в форме ПОМ (10), включающей все квантовые состояния системы, естественно определить как *неселектированную* с учетом того, что все квантовые состояния представлены в ней равноправно и какая-либо селекция квантовых переменных отсутствует. Противоположная ситуация наблюдается в случае предельно

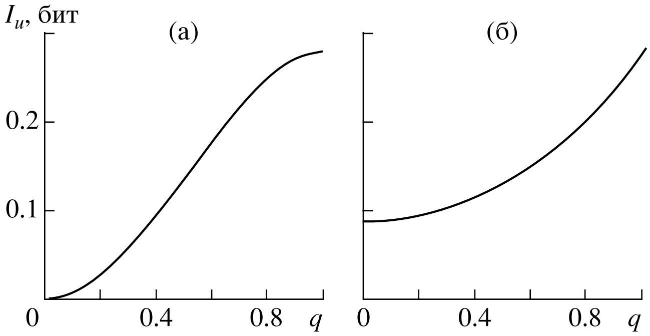

Рис. 5. Зависимость неселектированной информации I_u от параметра перепутанности q для чистого перепутанного состояния, образованного из двух взаимно ортогональных базисных состояний с весами $q/\sqrt{2}$ и $\sqrt{1-q^2/2}$ (а) и для смешанного состояния, образованного из полностью перепутанного чистого состояния, взятого с весом q, и смешанного состояния, взятого с весом $1-q$ и образованного из двух равно взвешенных чистых состояний в виде тензорных произведений ортогональных базисных состояний, так что для всех q парциальные энтропии входа и выхода равны 1 бит (б).

селектированной информации, когда используются ортогональные ПОМ, что типично для простейших криптографических схем обмена информацией [2]. В качестве примера проанализируем зависимость неселектированной информации от типа совместной матрицы плотности и ее основного параметра, задающего степень перепутанности, для случая чистых и смешанных состояний.

а. Чистое состояние задается волновой функцией

$$\hat{\rho}_{AB}^{(p)}(q) = |\psi_{AB}(q)\rangle\langle\psi_{AB}(q)|,$$
$$|\psi_{AB}(q)\rangle = \sqrt{1-\frac{q^2}{2}}|1\rangle|1\rangle + \frac{q}{\sqrt{2}}|2\rangle|2\rangle \qquad (12)$$

с параметром перепутанности q. Для предельных значений $q = 0.1$ она дает соответственно тензорное произведение и полностью перепутанное состояние.

б. Смешанное состояние задается матрицей плотности

$$\hat{\rho}_{AB}^{(m)}(q) = (1-q)\left(\frac{1}{2}|1\rangle|1\rangle\langle 1|\langle 1| + \frac{1}{2}|2\rangle|2\rangle\langle 2|\langle 2|\right) + q|\psi_{AB}(1)\rangle\langle\psi_{AB}(1)|, \qquad (13)$$

где ψ_{AB} определено в соотношении (12). Для предельных значений $q = 0.1$ получаем соответственно смешанное состояние с чисто классическими корреляциями и чистое полное перепутанное состояние.

Результаты расчетов неселектированной информации приведены на рис. 5. Максимальное значение $I_u = 0.27865$ достигается для полностью перепутанного состояния и совпадает с количеством *доступной* информации [47], рассчитанным в [27]. Термин “доступность” понимается в данном контексте как возможность ассоциирования с набором всех возможных квантовых состояний информации, различимой на фоне квантовой неопределенности.

Б. Селектированная информация

Селектированная информация соответствует обобщенным измерениям с ПОМ $\hat{E}_A$, $\hat{E}_B$, в которых не все квантовые состояния включены равноправным образом. Расчет приведенных ниже результатов выполнен для селектированной информации в системе двух кубитов, полученной с использованием измерений $\hat{E}_A$, $\hat{E}_B$, скомбинированных из двух различных типов: неселектированных измерений $\hat{E}(d\alpha)$ и $\hat{E}(d\beta)$ и ортопроекторных измерений $\hat{E}_k$ и $U^{-1}\hat{E}_l U$, которые соответствуют прямому измерению ортогональных квантовых состояний. Соответственно,

$$\hat{E}_A(\alpha) = (1-\chi)\hat{E}_A(d\alpha), \quad \hat{E}_A(k) = \chi\hat{E}_k,$$
$$\hat{E}_B(\beta) = (1-\chi)\hat{E}_B(d\beta), \quad \hat{E}_B(l) = \chi U^{-1}\hat{E}_l U. \qquad (14)$$

Здесь $k, l = 1, 2$, $\hat{E}_k = |k\rangle\langle k|$, а U описывает поворот волновой функции второго кубита, конкретизированный в виде зависящего от угла поворота ϑ преобразования $U(\vartheta) = \exp(i\hat{\sigma}_2\vartheta/2)$, заданного данным выражением в базисе $|k\rangle$, собственном для ПОМ $\hat{E}_k$ первого кубита. Дискретные результаты измерения на выходе k, l дополняют континуальные результаты α и β, что соответствует новым переменным с расширенным спектром значений $a = \alpha, k$ и $b = \beta, l$. Иными словами, измеряются переменные с комбинированным спектром значений, содержащим дискретную и непрерывную составляющие, включающие континуум всех волновых функций и выделенный ортогональный двумерный базис. Предельные случаи $\chi = 0, 1$ соответствуют неселектированному и полному ортопроекторному измерению. Матрица плотности взята в форме выражения (13). Совместное распределение вероятностей имеет вид

$$P(da, db) = \mathrm{Tr}\,\hat{\rho}_{AB}[\hat{E}_A(da)\otimes\hat{E}_B(db)]$$

и представлено компонентами

$$P(d\alpha, d\beta) = (1-\chi)^2\langle\alpha|\langle\beta|\hat{\rho}_{AB}|\beta\rangle|\alpha\rangle dV_\alpha dV_\beta,$$
$$P(k, l) = \chi^2\langle k|\langle l|\hat{\rho}_{AB}|l\rangle|k\rangle,$$
$$P(d\alpha, l) = (\chi(1-\chi))\langle\alpha|\langle l|\hat{\rho}_{AB}|l\rangle|\alpha\rangle dV_\alpha,$$
$$P(k, d\beta) = \chi(1-\chi)\langle k|\langle\beta|\hat{\rho}_{AB}|\beta\rangle|k\rangle dV_\beta.$$

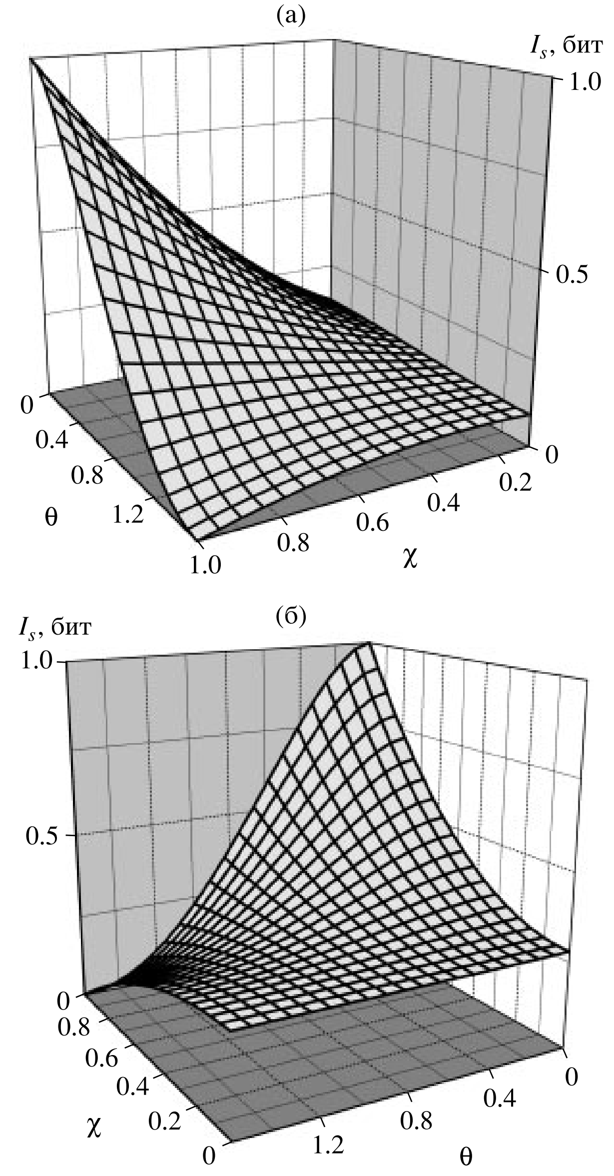

Рис. 6. Зависимость селектированной информации I_S в системе двух кубитов от степени селективности χ и относительной ориентации селективных измерений ϑ в отсутствие перепутанности при квазиклассической информационной связи, $q = 0$ (а) и для чистого перепутанного состояния, $q = 1$ (б).

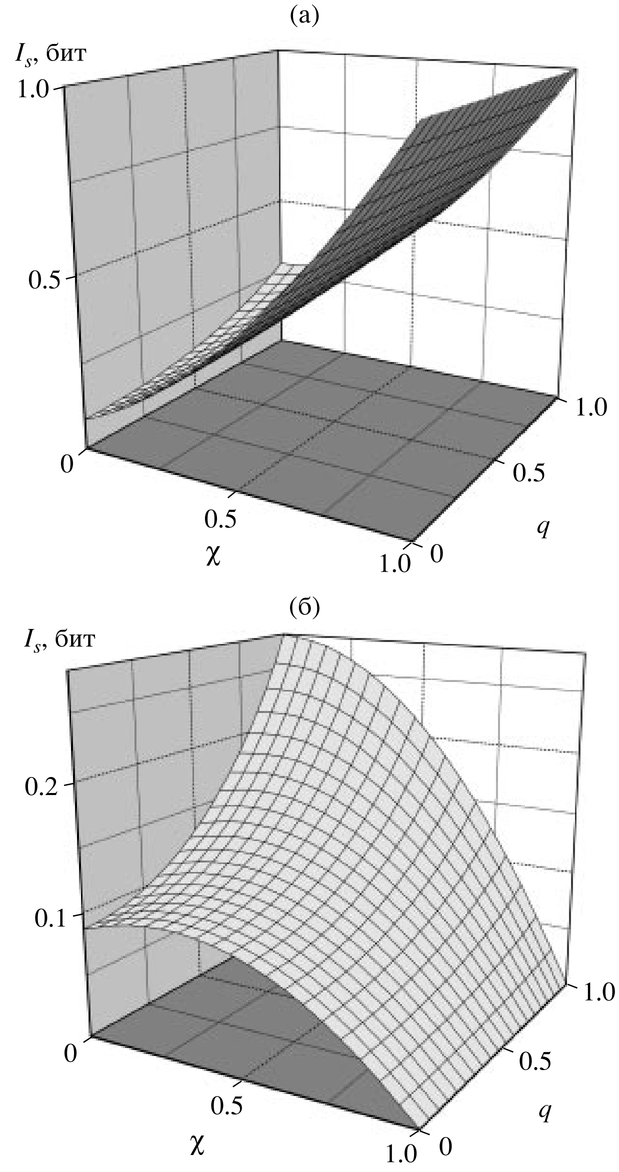

Рис. 7. Зависимость селектированной информации I_S в системе двух кубитов от степени селективности χ и параметра перепутанности q для параллельной ориентации селективных измерений, $\vartheta = 0$ (а) и для скрещенной ориентации селективных измерений, $\vartheta = \pi/2$ (б).

Здесь члены $P(d\alpha, l)$, $P(k, d\beta)$ соответствуют информационному обмену между дискретными и континуальными результатами измерения первого и второго кубитов. Из приведенных соотношений видно,что выполнено условие нормировки

$$\iint P(d\alpha, d\beta) + \int\sum P(d\alpha, l) + \\ + \sum\int P(k, d\beta) + \sum\sum P(k, l) = 1.$$

С учетом соотношений (14) и (13) мы имеем здесь три параметра: степень селективности $0 \leqq \chi \leqq 1$ рассматриваемого комбинированного измерения; относительную ориентацию ортопроекторных измерений $0 \leqq \vartheta \leqq \pi/2$ с крайними значениями, соответствующими параллельной и скрещенной ориентациям ортогональных базисов первого и второго кубита; параметр перепутанности $0 \leqq q \leqq 1$ (рис. 6, 7).

Из этих графиков можно извлечь следующие суммарные результаты. Наиболее неблагоприят-

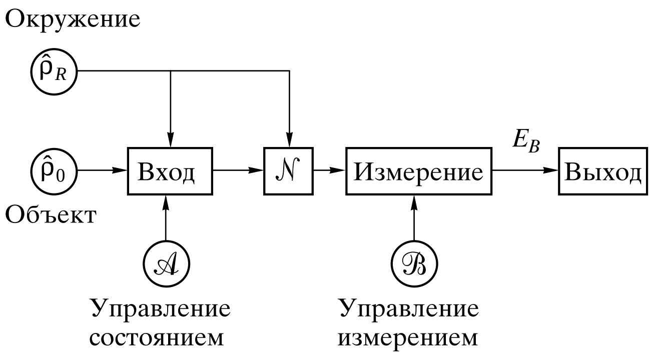

Рис. 8. Структурная схема квантовой экспериментальной установки.

ная ориентация $\vartheta = \pi/2$ уменьшает количество селектированной информации – вплоть до нулевого значения при $\chi = 1$, если только имеется ненулевой вклад селективного измерения, т.е. если $\chi > 0$. Для $\chi > 0$ зависимость количества информации от параметра перепутанности q мало существенна. Максимум информации $I_s = 1$ бит достигается только для значения степени селективности $\chi = 1$, т.е. для случая прямого измерения.

Отметим простое соответствие между неселектированной и предельно селектированной информацией, которое прямо следует из физического содержания соответствующих типов квантового измерения и справедливо не только для рассмотренного двумерного примера, но и в общем случае. Если полностью селектированное (в данном примере $\chi = 1$) измерение выполняется наугад – без априорной информации о структуре матрицы плотности, которая зависит от способа кодирования информации на входе и выходе, т.е. от ее привязки к выделенным направлениям ориентаций соответствующих спинов, – то получаемая таким образом информация, очевидно, должна быть усреднена по всем возможным ориентациям. Результат такого усреднения оказывается в точности равным величине неселектированной информации. Этот результат обязан специфике соотношения качественного содержания совместного распределения вероятностей вход–выход (11) для двух рассматриваемых типов измерительных процедур.

Для полностью селективного измерения в (11) в данном случае переменным α, β соответствуют дискретные индексы базисных состояний k, l. В произвольно выбранных для входа A и выхода B базисных волновых функций $|k\rangle$, $|l\rangle$ соответствующие ПОМ имеют вид $\hat{E}_k = U_A^{-1}(\alpha)|k\rangle\langle k|U_A(\alpha)$, $\hat{E}_l = U_B^{-1}(\beta)|l\rangle\langle l|U_B(\beta)$, где $U_{A,\,B}$ описывают поворот от исходного базиса к измерительному. Следовательно, совместное распределение вероятностей вход–выход имеет следующий вид:

$$P_{kl}(\alpha, \beta) = \\ = \langle k|\langle l|U_A(\alpha)U_B(\beta)\hat\rho_{AB}U_B^{-1}(\beta)U_A^{-1}(\alpha)|l\rangle|k\rangle, \quad (15)$$

где α, β являются параметрами распределения P_{kl}, определяющими его зависимость от ориентации измерительных процедур. Если же выписать соответствующее выражение для неселективного измерения с учетом вида ПОМ (10) и расписать его в виде суммы по проекциям с индексами k, l волновых функций $|\alpha\rangle = U_A^{-1}(\alpha)|0\rangle$, $|\beta\rangle = U_B^{-1}(\beta)|0\rangle$, то получим те же самые зависимости (15) от информационных в данном случае переменных α, β. Следовательно, распределение (15) по индексам k, l, одновременно задает и распределение вероятностей по ориентационным углам, содержащееся в процедуре неселективного измерения. Соответственно и интегралы, описывающие среднее количество селектированной информации, обмениваемой через переменные k, l, и неселектированную информацию, обмениваемую через непрерывные переменные α, β, имеют тождественный вид. Таким образом, неселективное измерение эквивалентно набору полностью селективных измерений, выполненных одновременно для всех возможных ориентационных углов измерительного базиса, и соответствующая ему совместимая информация автоматически учитывает неопределенность ориентации базиса при полностью селективном измерении.

4. КОЛИЧЕСТВЕННОЕ ИЗМЕРЕНИЕ ИНФОРМАЦИИ, ДОСТУПНОЙ В ФИЗИЧЕСКОМ ЭКСПЕРИМЕНТЕ

Проведенное выше обсуждение обобщенных квантовых измерений стимулирует интерес к дальнейшим обобщениям, с помощью которых можно ввести реалистичную концепцию количества информации, достижимого с использованием заданной схемы физического эксперимента, что заведомо может рассматриваться как одна из важнейших целей квантовой теории информации. Основная трудность при этом состоит в том, чтобы в достаточно общем виде ввести математическое описание информационной модели, соответствующей конкретной схеме эксперимента. Для этой цели вначале необходимо математически определить понятия входа и выхода, что фактически и является основной трудностью. На рис. 8 приведена блок-схема, на которой проиллюстрировано соответствующее решение.

Состояние объекта и его шумового окружения изменяется под действием управляющих взаимодействий, порождающих входную квантовую информацию, связанную либо с динамическими параметрами объекта, либо с набором некоторых представляющих интерес квантовых состояний. Выходная информация получается измерением на выходе канала, описываемого супероператорным преобразованием $\mathcal{N}$. Супероператорные меры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ обозначают преобразования, реализуемые управляющими взаимодействиями, а E_B описывает процедуру обобщенного квантового измерения в форме, соответствующей ПОМ.

Данная блок-схема соответствует типичной математической структуре матрицы плотности сложной системы, включающей два преобразования, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, описывающих соответственно контрольные и измерительные взаимодействия:

$$\hat{\rho}_{\text{вых}} = \mathcal{B}\mathcal{N}\mathcal{A}\hat{\rho}_{\text{вх}}. \quad (16)$$

Здесь $\hat{\rho}_{\text{вх}}$ и $\hat{\rho}_{\text{вых}}$ – начальная и конечная матрицы плотности набора степеней свободы, существенные в рамках рассматриваемой математической модели, соответствующей выбранной схеме эксперимента. Супероператоры $\mathcal{A}$, $\mathcal{N}$ и $\mathcal{B}$ описывают процессы извлечения физической информации, ее передачей ко входу и измерением, соответственно. Данная марковская структура преобразований не является самой общей – здесь с целью упрощения предполагается, что шумовые окружения, соответствующие каждому преобразованию, независимы и их матрицы плотности могут быть выделены из $\hat{\rho}_{\text{вх}}$ и учтены в структуре супероператорных преобразований. Только в результате этого упрощения возникает данная комбинация трех супероператоров и входной матрицы плотности и, как результат, относительно простое математическое представление информационной структуры в терминах соответствующих разложений супероператоров $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Тем не менее можно ожидать, что в определенных случаях может возникнуть необходимость в соответствующем обобщении соотношения (16).

Извлечение информации всегда сопряжено с использованием физических взаимодействий, описываемых соответствующими преобразованиями, которые являются унитарными только в том случае, если в них включены все задействованные степени свободы. При этом дополнительно должно быть включено также взаимодействие с шумовым окружением, что приводит к неунитарным преобразованиям. Обсудим здесь построение этих преобразований для двух примеров возможного выбора представляющей интерес физической информации о квантовой системе: 1) динамические параметры a, 2) квантовые состояния $|a\rangle$.

В первом случае извлечение физической информации достигается с помощью динамического возбуждения системы, математически отображаемого унитарным оператором $U_A(a)$, который, в свою очередь, может зависеть от управляющих параметров c. *Априорная* информация об a должна быть учтена в соответствующим образом заданной вероятностной мере $\mu(da)$. Тогда супероператор $\mathcal{A}$ может быть представлен как $\mathcal{A} = \int \mathcal{A}_a \mu(da)$ с

$$\mathcal{A}_a = \langle U_A(a) \odot U_A^{-1}(a)\rangle_E, \quad (17)$$

где $\odot$ обозначает место подстановки преобразуемой матрицы плотности, а угловые скобки – усреднение по шумовому окружению.

Во втором случае извлечение физической информации в сохраняемой форме, допускающей ее копирование, может быть достигнуто, в конечном счете, как результат некоторого обобщенного измерения, соответствующего набору положительных супероператоров

$$\mathcal{A}_a = \langle |a\rangle\langle a| \odot |a\rangle\langle a|\rangle_E. \quad (18)$$

При этом сумма $\mathcal{A} = \sum \mathcal{A}_a$ есть супероператор обобщенного измерения, представленный с помощью усреднения стандартного разложения $\sum_i \hat{A}_i \odot \hat{A}_i^+$, сохраняющего след вполне положительного супероператора [48] с адекватно конкретизированными операторами $\hat{A}_i = \hat{A}_i^+ \longrightarrow |a\rangle\langle a|$. Учитывая, что a может описывать и непрерывные переменные, следует использовать обобщенное представление $\mathcal{A} = \int \mathcal{A}_a \mu(da)$ в форме интеграла с мерой $\mu(da)$, гарантирующей – с учетом идемпотентности ($\hat{P}_a^2 = \hat{P}_a$) ортопроекторов $\hat{P}_a = |a\rangle\langle a|$ – соответствие данного разложения некоторой ПОМ: $\int |a\rangle\langle a| \mu(da) = \hat{I}$.

В наиболее общей форме наборы супероператоров (17), (18) представляются некоторой *положительной супероператорной мерой* (ПСМ) $\mathcal{A}(da) = \mathcal{A}_a\mu(da)$, которая является разложением некоторого сохраняющего след вполне положительного супероператора. ПСМ удовлетворяет условиям вполне положительности, $\mathcal{A}(da)\hat{\rho} \geqq 0$, и нормировки, $\mathrm{Tr}\int \mathcal{A}(da)\hat{\rho} = 1$. Последнее может быть эквивалентным образом представлено в форме сохранения единичного оператора $\int \mathcal{A}^*(da)\hat{I} = \hat{I}$ под действием эрмитово сопряженной ПСМ $\mathcal{A}^*$.

Здесь представляет интерес вновь рассмотреть специальный случай ПОМ, описанный выражением (10) с состояниями, заданными в гильбертовых пространствах H_A и H_B, соответствующих преобразованиям $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Данный выбор ПОМ связывает содержание информации, извлекаемой с помощью экспериментальной установки, непосредственно с самими квантовыми состояниями, что позволяет в наиболее прямой форме описать проявление фундаментальных ограничений, вытекающих из ее квантовой природы. При этом выходная информация представляется в "устойчивой" классической форме, потенциально допускающей ее совместное использование многими пользователями без каких-либо ограничений. Эта особенность классической информации может даже изначально закладываться по умолчанию в значение термина "информация", по крайней мере, в применении к экспериментально извлекаемой физической информации, в противоположность физическому содержанию когерентной информации, обсуждавшейся в разд. 2.

Повторяя приведенную выше аргументацию применительно к супероператору измерительной системы $\mathcal{B} = \int \mathcal{B}(db) = \int \mathcal{B}_b \nu(db)$ с супероператором $\mathcal{B}_b$, взятым в форме (18), представляем входную и выходную информацию в форме классических переменных a и b, описывающих интересующую информацию в случае обоих возможностей выбора (1) и (2). Соответствующее эти переменным совместное распределение вероятностей имеет вид

$$P(da, db) = \mathrm{Tr}\mathcal{B}(db)\mathcal{N}\mathcal{A}(da)\hat{\rho}_{\mathrm{in}}. \quad (19)$$

Это распределение, очевидно, всегда положительно и нормировано на единицу. Оно задает статистическое соответствие между представляющими интерес переменными и выходной информацией, извлекаемой с помощью экспериментальной установки. В результате *информационная эффективность* последней может быть выражена в количественной форме как классическая информация Шеннона, соответствующая данному распределению вероятностей. Эта величина, естественно, может быть использована в качестве количественного критерия оптимальности для оптимизации эксперимента по доступным управляющим параметрам.

Важно отметить, что взаимная совместимость состояний $|a\rangle$ и $|b\rangle$ для выбора (1) здесь не предполагается и в общем случае они могут соответствовать некоммутирующим переменным. В тривиальном предельном случае они могут совпадать или отличаться унитарным преобразованием, т.е. вся квантовая информация посылается с нулевой вероятностью ошибки. При этом, разумеется, внутренняя квантовая неопределенность такой системы не позволяет иметь распределения (19), устанавливающие взаимно-однозначное соответствие между значениями a и b. Если состояния принадлежат физически различным подсистемам, они, тем не менее, могут содержать квантовые корреляции, обусловленные соответствующей структурой супероператорного преобразования канала $\mathcal{N}$. Простейший пример задается супероператором вида $\mathcal{N} = U_{AB} \odot U_{AB}^{-1}$ с U_{AB}, описывающим унитарное преобразование, приводящее к перепутыванию состояний входа и выхода.

Управляющие параметры c могут быть либо фиксированы, либо допускать выбор из некоторого множества используемых значений $c \in \mathbf{C}$, который позволяет осуществить информационную оптимизацию по описанному критерию. Наличие в данной информационной структуре неизвестного априорного распределения $\mu(da)$ для динамических параметров a в случае информационного выбора (1) никак не связано с квантовой спецификой проблемы, т.е. проблема априорной неопределенности должна решаться точно теми же методами, которые используются в классической теории оптимальных статистических решений [49]. Что касается конкретизации преобразований $\mathcal{B}_b$ измерительной системы в форме (18), то в самом общем случае оно может быть описано в форме ПСМ произвольного вида. В итоге две ПСМ, $\mathcal{A}(da)$ и $\mathcal{B}(db)$, покрывают очень широкий диапазон возможных типов управления квантовым состоянием объекта и реализованной в рассматриваемой экспериментальной схеме процедуры квантового измерения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе предложена наиболее общая классификация типов квантовой информации, основанная на совместимости/несовместимости состояний входа и выхода квантового канала и подразделяющая с этой точки зрения все возможные типы информации на *классическую*, *полуклассическую*, *когерентную* и *совместимую*.

Физическим содержанием когерентной информации является объем внутренне несовместимых состояний, обмениваемый между двумя системами и измеряемый как мера перепутанности, *сохраненной* между выходом и опорной системой. Перепутанность с последней используется для количественного измерения информации, имеющейся на входе и выходе квантового канала, задаваемого соответствующим супероператорным преобразованием. Введенная здесь *одномоментная* когерентная информация, в которой информационный канал представлен соответствующей совместной матрицей плотности, устанавливает адекватное соответствие между двумя подходами к определению квантовой информации, в одном из которых канал задается супероператорным преобразованием входной матрицей плотности, а в другом – совместной матрицей плотности вход–выход. Выполненные расчеты для скорости обмена когерентной информацией для канала Λ-система–поле свободных фотонов дают верхнюю границу 0.178γ для симметричной Λ-системы и 0.316γ в отсутствие этого ограничения.

Мотивирована необходимость введения *совместимой информации* как адекватной характеристики квантового информационного обмена между двумя совместимыми системами квантовых состояний. Совместимая информация выражается в терминах классической теории информации, несмотря на наличие внутренней квантовой несовместимости событий, в противоположность когерентной информации, которая принципиально не сводится к классическим представлениям. Тем не менее определение когерентной информации имеет генетическую связь с совместимой информацией, поскольку и ее определение основано на выделении пары совместимых систем, аналогичных входной и выходной системам при рассмотрении совместимой информации, одной из которых является опорная система, а второй – вход или выход. Таким образом, наличие взаимно совместимых наборов квантовых состояний является необходимым атрибутом для количественного измерения любого из рассмотренных типов квантовой информации. Тем не менее в их поведении при обсуждении взаимодействующих систем имеется принципиальное качественное различие, поскольку, в отличие от когерентной информации, наличие совместимой может быть связано как с чисто квантовыми, так и с классическими корреляциями вход–выход. В частности, в задаче Дике это приводит к возможности существования совместимой информации – в противоположность когерентной – после распада короткоживущего коллективного состояния Дике.

Показана принципиальная необходимость селекции квантовых состояний для реализации возможности получения сколько-нибудь существенного объема совместимой информации.

Выявлена эквивалентность неселектированной и полностью селектированной информации, усредненной по всем возможным ориентациям ортогональных базисов полных квантовых измерений на входе и выходе, которые реализуют полную селекцию квантовых состояний.

Показано, что взаимная и внутренняя совместимость, т.е. классичность входной и выходной квантовой информации, является естественным ограничением физического содержания информационного потока в экспериментальной установке. Это дает возможность ввести достаточно общую единую математическую структуру, соответствующую выбранной схеме реального физического эксперимента, и количественно охарактеризовать ее *информационную эффективность*. При этом информационный обмен между подсистемами, приготовляющими квантовую информацию, и измерительным устройством описывается вероятностным соответствием между классическими переменными, определяющими физические параметры изучаемой квантовой системы и измеренными выходными переменными. Общее математическое представление процесса создания квантовой информации и ее считывания задается в форме двух *положительных супероператорных мер*. Это математическое представление квантового информационного обмена в экспериментально реализуемой ситуации выглядит многообещающим в плане применения квантовой теории информации непосредственно к потребностям физического эксперимента. Подходы, предложенные в данной статье, можно рассматривать также и как дополнительные аргументы в пользу общего утверждения о физичности понятия квантовой информации, вынесенного в заголовок статьи [50].

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 01-02-16311), Государственных научно-технических программ Российской Федерации “Фундаментальная метрология” и “Нанотехнология”, а также INTAS (грант 00-479).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gisin N., Ribordy G., Tittel W., Zbinden H.* // LANL e-print quant-ph/0101098.
2. *Preskill J.* Lecture notes on Physics 229: Quantum information and computation, http://www.theory.caltech.edu/people/preskill/ph229/
3. *Steane A.* // Rep. Prog. Phys. 1998. V. 61. № 2. P. 117.
4. *Валиев К.А., Кокин А.А.* Квантовые компьютеры: надежды и реальность. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001.
5. *Whitaker M.A.B.* // Prog. Quantum Electron. 2000. V. 24. № 1.
6. *Кадомцев Б.Б.* // Усп. физ. наук. 1994. Т. 164. № 5. С. 449.
7. *Клышко Д.Н.* // Усп. физ. наук. 1998. Т. 168. № 9. С. 975.
8. *Килин С.Я.* // Усп. физ. наук. 1999. Т. 169. № 5. С. 507.
9. *Менский М.Б.* // Усп. физ. наук. 2000. Т. 170. № 6. С. 631.
10. *Баргатин И.В., Гришанин Б.А., Задков В.Н.* // Усп. физ. наук. 2001. Т. 171. № 6. С. 625.
11. *Белокуров В.В., Тимофеевская О.Д., Хрусталев О.А.* Квантовая телепортация – обыкновенное чудо. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2000.
12. *Кадомцев Б.Б.* Динамика и информация. М.: Редакция журнала УФН, 2000.
13. The Physics of Quantum Information: Quantum Cryptography, Quantum Teleportation, Quantum Computation / Eds D. Bouwmeester, A. Ekert, A. Zeilinger. N. Y.: Springer, 2000.
14. *Менский М.Б.* Квантовые измерения и декогеренция. М: Физматгиз, 2001.
15. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1970.

16. *Садбери А.* Квантовая механика и физика элементарных частиц. М.: Мир, 1989.
17. *Cabello A.* // LANL e-print quant-ph/0012089.
18. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука, 1974.
19. *Блохинцев Д.И.* Основы квантовой механики. М.: Наука, 1983.
20. *Давыдов А.С.* Квантовая механика. М.: Наука, 1973.
21. *Shannon C.E.* // Bell Syst. Techn. J. 1948. V. 27. July. P. 379; October. P. 623.
22. *Галлагер Р.Дж.* Теория информации и надежная связь. М.: Сов. радио, 1974.
23. *Brukner Č., Zeilinger A.* // LANL e-print quant-ph/0006087.
24. *Hall M.J.W.* // LANL e-print quant-ph/0007116.
25. *Brukner Č., Zeilinger A.* // LANL e-print quant-ph/0008091.
26. *Jones K.R.W.* // Phys. Rev. A. 1994. V. 50. № 5. P. 3682.
27. *Caves C.M., Fuchs C.M.* // LANL e-print quant-ph/9601025.
28. *Холево А.С.* // Проблемы передачи информ. 1973. Т. 9. № 2. С. 31.
29. *Hall M.J.W.* // Phys. Rev. A. 1997. V. 55. № 1. P. 100.
30. *Schumacher B., Nielsen M.A.* // Phys. Rev. A. 1996. V. 54. № 4. P. 2629.
31. *Lloyd S.* // Phys. Rev. A. 1997. V. 55. № 3. P. 1613.
32. *Гришанин Б.А.* // Проблемы передачи информ. 2002. Т. 38. № 1. С. 31.
33. *Barnum H., Schumacher B.W., Nielsen M.A.* // Phys. Rev. A. 1998. V. 57. № 6. P. 4153.
34. *Гришанин Б.А., Задков В.Н.* // ЖЭТФ. 2000. Т. 118. № 5. С. 1048.
35. *Grishanin B.A., Zadkov V.N.* // Phys. Rev. A. 2000. V. 62. № 3. P. 032303.
36. *Grishanin B.A., Zadkov V.N.* // Laser Physics. 2000. V. 10. № 6. P. 1280.
37. *Dicke R.H.* // Phys. Rev. 1954. V. 93. № 1. P. 9.
38. *Стратонович Р.Л.* // Изв. вузов. Сер. Радиофизика. 1965. Т. 8. № 1. С. 116.
39. *Zbinden H., Brendel J., Tittel W., Gisin N.* // J. Phys. A. 2001. V. 34. № 35. P. 7103.
40. *Lindblad G.* // Quantum Aspects of Optical Communication: Springer-Verlag Lecture Notes in Physics / Eds. C. Benjaballah, O. Hirota, S. Reynaud. Heidelberg: Springer-Verlag, 1991. V. 378. P. 71.
41. *Holevo A.S.* // LANL e-print quant-ph/9809022.
42. *Гришанин Б.А.* // Изв. АН СССР. Сер. Технич. кибернетика. 1973. Т. 11. № 5. С. 127.
43. *Grishanin B.A., Zadkov V.N.* // Laser Physics. 2001. V. 11. № 12. P. 1088.
44. *Brukner Č., Zeilinger A.* // Phys. Rev. Lett. 1999. V. 83. № 17. P. 3354.
45. *Glauber R.J.* // Quantum Opt. Electron. / Eds C. DeWitt, A. Blandin, C. Cohen-Tannoudji. N.-Y.: Gordon and Breach, 1965. P. 53.
46. *Гришанин Б.А.* Квантовые случайные процессы. http://comsim1.phys.msu.su/index.html
47. *Schumacher B.* // Complexity, Entropy and the Physics of Information / Ed. W.H. Zurek. RedWood City: Addison-Wesley, 1990. P. 29.
48. *Kraus K.* States, Effects and Operations. Berlin: Springer Verlag, 1983.
49. *Вальд А.* Статистические решающие функции (сб. Позиционные игры). М: Сов. радио, 1967.
50. *Rudolph T.* // LANL e-print quant-ph/9904037.
51. *Schumacher B.W.* // Phys. Rev. A. 1995. V. 51. № 4. P. 2738.